(+6)

8/12

Ορισμός

$A_i, i\in I$ συλλογή συνόλων. Η $A_i, i\in I$ έχει την ιδιότητα των πεπερ. τομών (ΙΠΤ) $\Leftrightarrow \forall J\subseteq I$, J πεπερασμένο ισχύει $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$

Πχ 1

$A_\nu = (0, \frac{1}{\nu}], \nu\in\mathbb{N}$

$\{A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \dots, A_{\nu_k}\}$ πεπερασμένη υποσυλλογή της $A_\nu, \nu\in\mathbb{N}$

$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k \Rightarrow \frac{1}{\nu_k} < \dots < \frac{1}{\nu_2} < \frac{1}{\nu_1} \Rightarrow (0, \frac{1}{\nu_k}] \subseteq \dots \subseteq (0, \frac{1}{\nu_2}] \subseteq (0, \frac{1}{\nu_1}]$

Άρα $\bigcap_{i=1}^{k} A_{\nu_i} = A_{\nu_1} \cap \dots \cap A_k = (0, \frac{1}{\nu_k}] \neq \emptyset$

Άρα αυτή η συλλογή (η $A_\nu$) έχει την ΙΠΤ.

Ν.δ.ο. $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \emptyset$:

Έστω $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu \neq \emptyset$ κ $\alpha\in\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

Τότε $\alpha > 0 \Rightarrow (\exists \nu_0\in\mathbb{N}): \frac{1}{\nu_0} < \alpha \Rightarrow \alpha \notin (0, \frac{1}{\nu_0}] = A_{\nu_0}$ Άτοπο

Η $A_\nu$ έχει την ιδιότητα των πεπερ. τομών αλλά έχει κενή τομή

Θεώρημα

$(E,\rho)$ συμπαγής $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{Τυχούσα οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του } E \text{ που} \\ \text{έχει την Ι.Π.Τ., έχει μη κενή τομή}\end{cases}$

Συνέχεια από πχ. 1

Άρα ο μ.χ. $((0,1], |\,|)$ δεν είναι συμπαγής

$(0, \frac{1}{\nu}] = (0,1] \cap [0, \frac{1}{\nu}]$

Απόδειξη Θεωρήματος

$(\Rightarrow)$ Έστω $(E,\rho)$ συμπαγής κ έστω, επιπλέον, $C_i, i\in I$ μια οικογένεια υποσυνόλων του E, που έχει την Ι.Π.Τ.

Έστω $\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} C_i)^c = \emptyset^c \Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i^c = E \Rightarrow C_i^c, i\in I$ ανοιχτή κάλυψη του E

Συμπαγής $\Rightarrow$ Η $C_i^c, i\in I$ έχει πεπερ. υποκάλυψη. Δηλ. $\exists J\subseteq I$ (πεπερ.): $E = \bigcup_{i\in J} C_i^c \Rightarrow$

$E^c = (\bigcup_{i\in J} C_i^c)^c \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i\in J} (C_i^c)^c = \bigcap_{i\in J} C_i$ ΑΤΟΠΟ

$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει το (*). Θ.δ.ο. $(E,\rho)$ συμπαγής. Έστω $A_i, i\in I$ μια ανοιχτή κάλυψη του E. Δηλ. $E = \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow E^c = (\bigcup_{i\in I} A_i)^c \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

Η οικογένεια $A_i^c, i\in I$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E

Η οικογένεια $A_i^c, i\in I$ δεν έχει την Ι.Π.Τ., λόγω της υπόθεσης (*)

Άρα $(\exists J\in I$ (πεπερ.)$): \bigcap_{i\in J} A_i^c = \emptyset \Rightarrow (\bigcap_{i\in J} A_i^c)^c = \emptyset^c \Rightarrow \bigcup_{i\in J} (A_i^c)^c = E \Rightarrow \bigcup_{i\in J} A_i = E$

**Πχ**

$(E,\rho)$ διακριτός μ.χ., $E$ απέραντο

$E = \bigcup_{x\in E}\{x\}$

Η συλλογή $\{x\}, x\in E$ δεν έχει πεπερ. υποκάλυψη Άρα $(E,\rho)$ μη συμπαγής

**Εφαρμογή**

Αν $E$ πεπερ. τότε $(E,\rho)$ συμπαγής για κάθε μετρική

**Απόδειξη**

Έστω $A_i, i\in I$ μια ανοιχτή κάλυψη του $E=\{x_1,\dots,x_k\}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in E=\bigcup A_i \Rightarrow (\exists A_{i_1}): x_1\in A_{i_1} \\ \quad \vdots \\ x_k\in E=\bigcup A_i \Rightarrow (\exists A_{i_k}): x_k\in A_{i_k}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{τότε } E=\{x_1,\dots,x_k\}\subseteq A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}$$

- Ο $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής, καθώς επίσης και τα $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$
- $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$ δεν είναι συμπαγής